SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TRIGONOMETRÍA

Tema: Ecuaciones e Inecuaciones trigonométricas

Semana: 18

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas que se satisface para ciertos valores de la variable, cuando las expresiones que intervienen son funciones trigonométricas decimos que se trata de una ecuación trigonométrica.

Ejemplo

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$cosx = 1$$

$$senx + cosx = \sqrt{2}$$

Problema

Resuelva la ecuación

$$senx = 0$$

Resolución

$$senx = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\ldots (Soluciones\ particulares\ )$$

$$x = k\pi, k \in \mathrm{Z} \ldots\ldots\ldots (Solución\ General\ )$$

Nota

Resolvemos una ecuación trigonométrica cuando determinamos todos los valores de la variable “x” que verifica la igualdad y ello se logra principalmente con

a) La circunferencia trigonométrica
b) Identidades trigonométricas
c) Factorización
d) Gráfica de las funciones
e) Propiedades algebraicas

Problema UNI 2019

5. (UNI 2019 II) Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; determine el conjunto solución de la ecuación

$sec(x)(2\,sen(x)+1)-4\,sen(x)-2=0$

Dé como respuesta la suma de los elementos de ese conjunto.

A) $\frac{-\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) π

Resolución

Dado la ecuación trigonométrica

$$secx(2senx+1)-4senx-2=0;\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$$

Factorizamos la ecuación

$$secx(2senx+1)-2(2senx+1)=0$$

$$(secx-2)(2senx+1)=0$$

$i)secx=2$

$cosx=\frac{1}{2}$

$x=60°,-60°$

$ii)senx=-\frac{1}{2}$

$x=-30°$

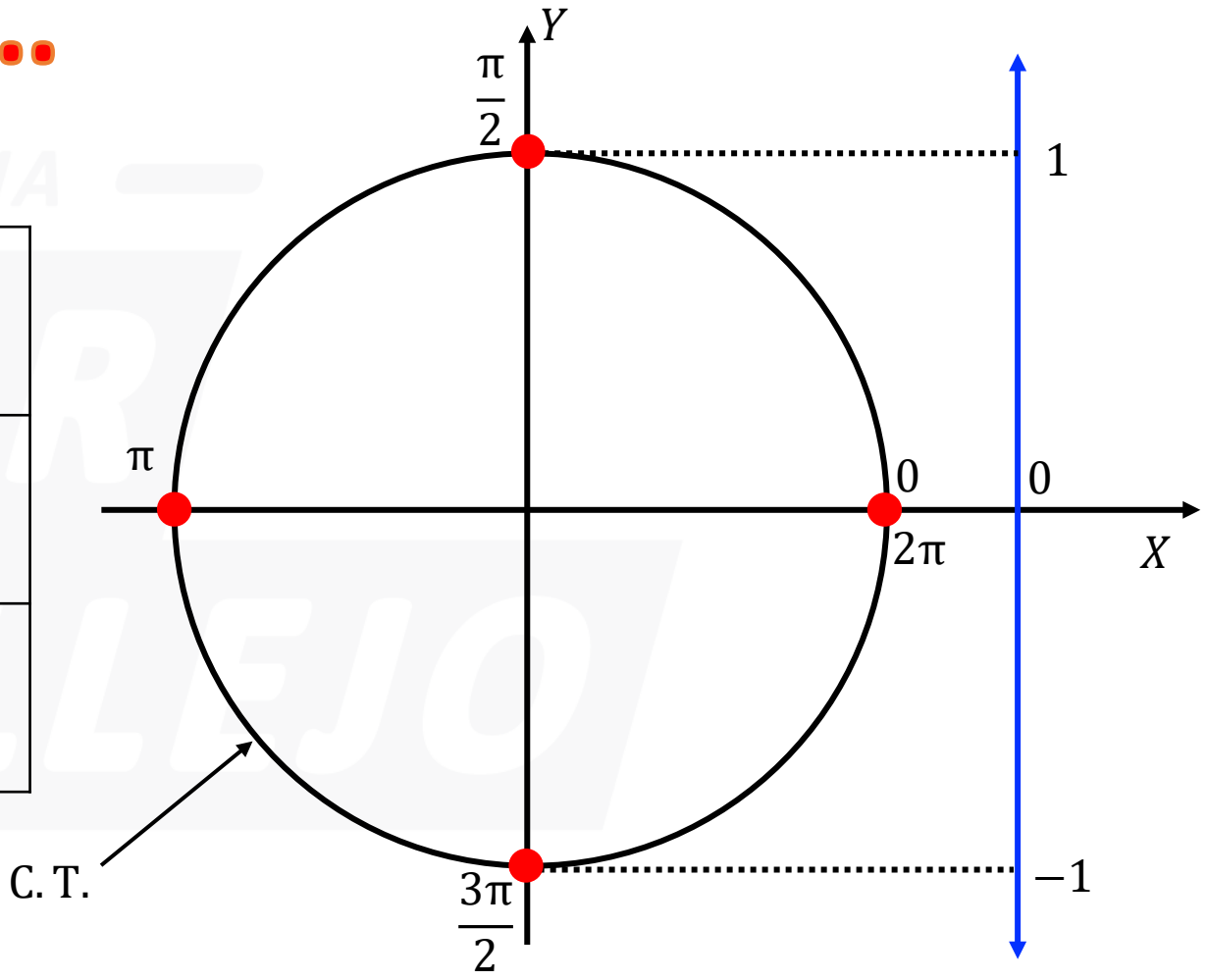
Nos preguntan

$$\therefore \sum x = 60° - 60° - 30° \quad = -30°$$

Tener en cuenta …

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$

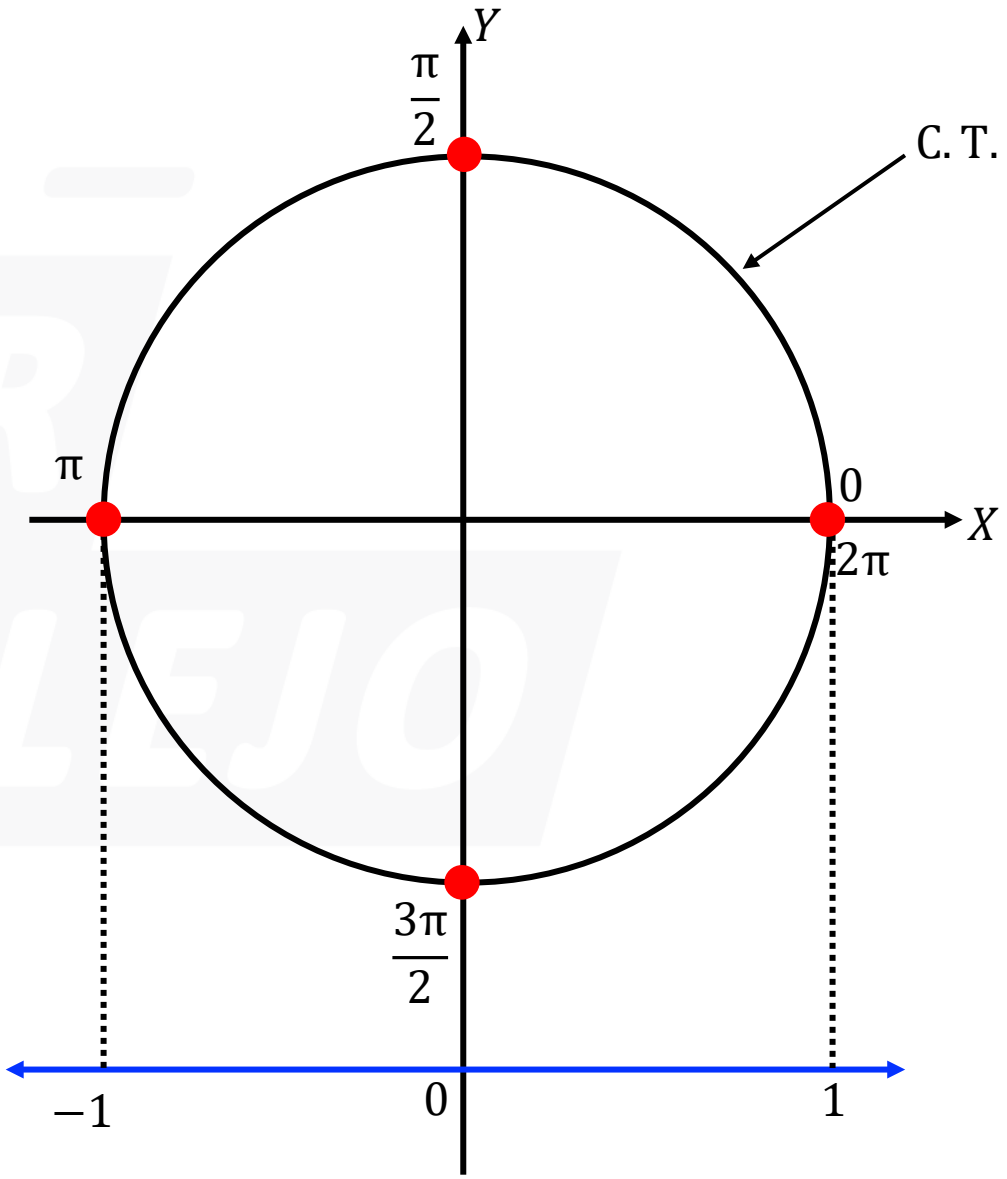
$\text{sen}\alpha = 1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$
$\text{sen}\alpha = -1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$
$\text{sen}\alpha = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = n\pi$



Tener en cuenta …

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha = 1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = 2n\pi$
$\cos\alpha = -1$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = 2n\pi + \pi$
$\cos\alpha = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$



Expresiones generales de solución de una ecuación trigonométrica elemental

Teorema

$senx = N \rightarrow x = n\pi + (-1)^n arcsen(N); n \in Z$
$\cos x = N \rightarrow x = 2n\pi \pm arccos(N)$
$\tan x = N \rightarrow x = n\pi + arctan(N)$

Problema

Resuelva la siguiente ecuación:

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$$

Resolución

$$cos^2 2x + 4cos2x = 0$$

$$cos2x(cos2x + 4) = 0$$

$$i)\ cos2x = -4$$

$$x = \{\emptyset\}$$

$$ii)\ cos2x = 0$$

$$2x = 2k\pi \pm arccos(0)\,; k \in Z$$

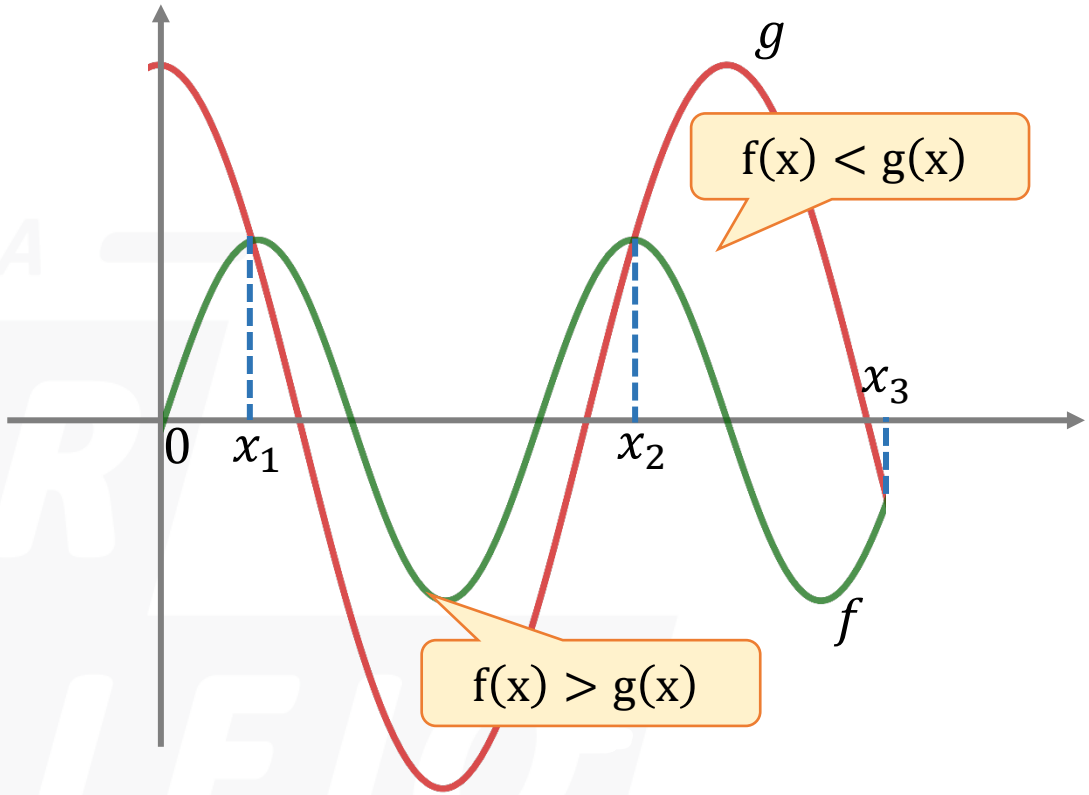
$$2x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Inecuaciones trigonométricas

Son expresiones de la forma $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x), f(x) < g(x)$ v $f(x) > g(x)$, y las soluciones son todos los números que pertenecen a $Domf \cap Domg$ y que verifican la desigualdad dadas

Las inecuaciones se resuelven de manera analítica a partir de la circunferencia trigonométrica, propiedades algebraicas y/o funciones



Del gráfico

$\text{Si } f(x) = g(x) \text{ las soluciones son } x_1, x_2, x_3$

$\text{Si } f(x) > g(x) \text{ entonces } x \in \langle x_1; x_2 \rangle$

$\text{Si } f(x) < g(x) \text{ entonces } x \in \langle 0; x_1 \rangle \cup \langle x_2; x_3 \rangle$

Problema UNI 2018

2. (UNI 2018 II) Resuelva la siguiente inecuación:

$$\cos x + \frac{3x}{2\pi} \geq 0$$

A) $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; +\infty\right\rangle$

B) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\infty\right\rangle$

C) $x \in \left\langle -\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$

D) $x \in \left\langle -\infty; -\frac{\pi}{3}\right]$

E) $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}; +\infty\right\rangle$

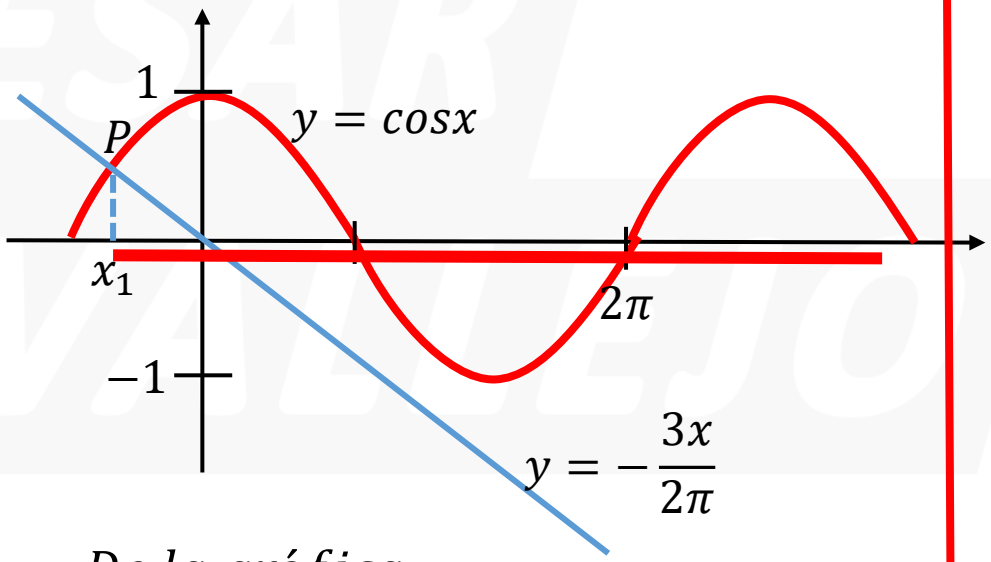
Resolución

De la condición

$$\cos x + \frac{3x}{2\pi} \geq 0$$

$$\cos x \geq -\frac{3x}{2\pi}$$

Graficamos las funciones



En el punto P

$$\cos x = -\frac{3x}{2\pi}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{3}$$

Entonces

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}; +\infty\right\rangle$$

De la gráfica

$$x \in [x_1; +\infty\rangle$$

A partir de la ecuación

$x^2 + 5 = 2(x - 2\cos(ax + b))$

Calcule el valor de

$sen^2(a + b) + cos^2 a - cos^2 b$

A) $\frac{1}{2}$

B) 0

C) $-\frac{1}{2}$

D) 1

E) 2

Resolución

De la condición

$$x^2 + 5 = 2(x - 2\cos(ax + b))$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4[1 + \cos(ax + b)] = 0 \ldots (I)$$

$$(x - 1)^2 + 4[1 + \cos(ax + b)] = 0$$

$$\rightarrow x = 1 \quad \wedge \quad \cos(ax + b) = -1$$

$$\rightarrow \cos(a + b) = -1 \ldots (II)$$

$$\rightarrow a + b = 2n\pi + \pi$$

Piden:

$$K = sen^2(a + b) + \cos^2(a) - \cos^2(b)$$

$$K = sen^2(2n\pi + \pi) + \underbrace{\cos^2(2n\pi + \pi - b)}_{\cos^2(b)} - \cos^2(b)$$

$$\therefore \mathbf{K = 0}$$

Resolver

$$\begin{cases} \tan x + \cot y = \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \tan x \cot y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

si $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ e $y \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$

Calcule : $x + y$

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{7\pi}{2}$ C) $\frac{10\pi}{3}$

D) $\frac{13\pi}{6}$ E) $\frac{19\pi}{6}$

Resolución

Por legendre

$$\underbrace{(\tan x + \cot y)^2}_{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} - (\tan x - \cot y)^2 = 4\underbrace{\tan x \cot y}_{\frac{1}{3}}$$

$$(\tan x - \cot y)^2 = 0 \rightarrow \tan x = \cot y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

enel intervalo para $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$, $x = \pi + \frac{\pi}{6}$

enel intervalo para $y \in \langle 2\pi; 3\pi \rangle$, $y = 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow x + y = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \mathbf{x + y = \frac{7\pi}{2}}$$

Dado el sistema

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{4\pi}{3}\ldots(1) \\ \sec x+\sec y=1\ldots(2) \end{cases}$$

el valor de $\cos(x-y)$ es

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) -1

Resolución

En el sistema , en la ecuacion (2)

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}=1 \rightarrow 2(\cos y+\cos x)=2\cos x.\cos y$$

$$4\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$4\underbrace{\cos\frac{2\pi}{3}}_{-1/2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\underbrace{\cos\frac{4\pi}{3}}_{-1/2}+\underbrace{\cos(x-y)}_{2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-1}$$

$$4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-3=0 \quad \text{,factorizando ...}$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cancel{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos(x-y)=-\frac{1}{2}$$

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe